ÚLOHY DOMÁCÍ ČÁSTI 1. KOLA
68. ROČNÍKU MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY
PRO ŽÁKY STŘEDNÍCH ŠKOL (2018/2019)

Kategorie A

1. O posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ víme, že pro všechna přirozená čísla n platí

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n^2 - 4a_n + 6}.$$

a) Najděte všechny hodnoty a_1, pro které je tato posloupnost konstantní.
b) Nechť $a_1 = 5$. Určete největší celé číslo nepřevyšující a_{2018}. (*Vojtech Bálint*)

2. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Označme D patu výšky z vrcholu A a D_1, D_2 obrazy bodu D v osových souměrnostech po řadě podle přímek AB, AC. Dále označme E_1 a E_2 body na přímce BC takové, že $D_1E_1 \parallel AB$ a $D_2E_2 \parallel AC$. Dokažte, že body D_1, D_2, E_1, E_2 leží na téže kružnici, jejíž střed leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC. (*Patrik Bak*)

3. Najděte všechna nezáporná celá čísla m, n, pro něž platí $|4m^2 - n^{n+1}| \leqq 3$. (*Tomáš Jurík*)

4. Je dána množina M přirozených čísel s n prvky, kde n je liché číslo větší než jedna. Dokažte, že počet uspořádaných dvojic (p, q) různých prvků z M takových, že aritmetický průměr čísel p, q je prvkem M, je nejvýše $\frac{1}{2}(n-1)^2$. (*Martin Panák, Patrik Bak*)

5. Sestrojte trojúhelník ABC, znáte-li jeho obvod o, poloměr ϱ kružnice připsané ke straně BC a velikost výšky v na tuto stranu. Proveďte diskusi v závislosti na daných délkách. (*Patrik Bak*)

6. Na hrací desce je nakreslen pravidelný n-úhelník s jedním vrcholem vyznačeným jako past. Tom a Jerry hrají následující hru. Na počátku Jerry postaví figurku na některý vrchol n-úhelníku. V každém kroku pak Tom řekne nějaké přirozené číslo a Jerry posune figurku o tento počet vrcholů podle své volby buď ve směru, anebo proti směru chodu hodinových ručiček. Najděte všechna $n \geqq 3$, při kterých může Jerry tahat figurkou tak, aby nikdy neskončila v pasti. Jak se změní odpověď, když je Tom k desce otočen zády, zná jen dané n a nevidí, kam Jerry figurku na počátku postaví ani kam s ní v jednotlivých krocích táhne? (*Pavel Calábek*)

Kategorie B

1. Najděte všechna osmimístná čísla taková, z nichž po vyškrtnutí některé čtveřice sousedních číslic dostaneme čtyřmístné číslo, které je 2019krát menší. (*Pavel Calábek*)

2. V trojúhelníku ABC s pravým úhlem u vrcholu A platí $|AB| = 4$ a $|AC| = 3$. Označme M střed přepony BC a N průsečík osy vnitřního úhlu u vrcholu B s odvěsnou AC. Úsečky AM a BN se protnou v bodě, který označíme K. Vypočtěte poměr obsahů trojúhelníku BAK a čtyřúhelníku $CNKM$. (*Patrik Bak*)

3. *Úpravou* přirozeného čísla nazveme následující operaci: je-li číslo sudé, vydělíme je dvěma; je-li liché, připočteme k němu číslo 1.

a) Dokažte, že z libovolného přirozeného čísla dostaneme po několika úpravách číslo 1.

b) Pro které z čísel $1, 2, \ldots, 10^6$ budeme potřebovat největší počet úprav, než získáme číslo 1? (*Ján Mazák*)

4. Pro nezáporná reálná čísla a, b platí $a^2 + b^2 = 1$. Určete nejmenší i největší možnou hodnotu výrazu

$$V = \frac{a^4 + b^4 + ab + 1}{a + b}.$$

(*Patrik Bak, Jaromír Šimša*)

5. Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník, v němž $AD \perp BD$. Označme M průsečík jeho úhlopříček a sestrojme kolmý průmět P bodu M na přímku AB a kolmý průmět Q bodu B na přímku AC. Dokažte, že bod M je středem kružnice vepsané trojúhelníku PQD. (*Jaroslav Švrček, Jaromír Šimša*)

6. Konečnou množinu přirozených čísel nazveme *pěknou*, jestliže k výpisu těchto čísel v desítkové soustavě potřebujeme sudý počet každé ze zastoupených číslic. Pěknými množinami jsou například $\{11, 13, 31\}$, $\{10, 100, 110\}$ a také prázdná množina. Určete, kolik je všech pěkných podmnožin množiny $\{1, 2, \ldots, 2\,018\}$. (*Patrik Bak*)

Kategorie C

1. Neznámé číslo je dělitelné právě čtyřmi čísly z množiny $\{6, 15, 20, 21, 70\}$. Určete, kterými. (*Michal Rolínek*)

2. Uvnitř strany AB trojúhelníku ABC jsou dány body D a E tak, že $|AD| = |DE| = |EB|$. Body A a B jsou po řadě středy úseček CF a CG. Přímka CD protíná přímku FB v bodě I a přímka CE protíná přímku AG v bodě J. Dokažte, že průsečík přímek AI a BJ leží na přímce FG. (*Pavel Calábek*)

3. Nechť a, b, c jsou kladná reálná čísla, jejichž součet je 3, a každé z nich je nejvýše 2. Dokažte, že platí nerovnost

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3abc < 9.$$

(*Patrik Bak*)

4. Každé pole tabulky 2×13 obarvíme právě jednou ze čtyř barev. Kolika způsoby to lze provést tak, aby žádná dvě sousední pole nebyla obarvena stejnou barvou? (Za sousední považujeme právě ta pole tabulky, která mají společnou stranu.) (*Jaroslav Švrček*)

5. Nechť α, β, γ, δ, ε, φ, ψ, ω značí po řadě velikosti vnitřních úhlů při vrcholech A, B, C, D, E, F, G, H konvexního osmiúhelníku $ABCDEFGH$, v němž platí

$$\alpha + \beta = \gamma + \delta = \varepsilon + \varphi = \psi + \omega.$$

Označme dále K, L, M, N po řadě středy úhlopříček AD, CF, EH, GB. Dokažte, že přímky KM a LN jsou navzájem kolmé. (*Josef Tkadlec*)

6. Najděte všechna trojmístná čísla n s třemi různými nenulovými číslicemi, která jsou dělitelná součtem všech tří dvojmístných čísel, jež dostaneme, když v původním čísle vyškrtneme vždy jednu číslici. (*Jaromír Šimša*)